Zastosowania różniczkowania

1 Metalowa rama okienna w kształcie prostokąta zwieńczonego półkolem ma być wykonana z jednego, niepociętego pasa metalu. Jeśli długość metalowego pasa wynosi 10 m, znajdź wymiary okna, które przepuszcza maksymalną ilość światła.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Jeden element destylatora do whisky składa się z walca wykonanego z miedzianej blachy ze stożkiem znajdującym się na jego czubku, również wykonanym z miedzianej blachy. Aby zoptymalizować produkcję, destylator musi mieć jak największą objętość, ale jednocześnie zyski z produkcji pomniejszają wysokie koszty blachy miedzianej. Dla danej objętości całkowitej i okrągłej podstawy o zadanym promieniu wykaż, że ilość użytej miedzi jest minimalna, gdy półpionowy kąt stożka α jest taki, że $\cos\alpha = 2/3$.

Uwaga. Kąt półpionowy stożka (ang. semi-vertical angle) jest połową kąta rozwarcia stożka. Wyjaśnia to rysunek zamieszczony w rozwiązaniu zadania 4.

Rozwiązanie

3 Aby osiągnąć efekt wizualny, artysta chce oprawić prostokątny obraz w prostokątną ramę, tak aby boki ramy nie były równoległe do boków obrazu. Boki obrazu to *a* i *b*, a rama jest tak skonstruowana, że każdy z jej boków styka się z wierzchołkiem obrazu. Jaka jest maksymalna powierzchnia ramy?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

4 Element konstrukcyjny jest kulą z wyciętym w niej otworem stożkowym. Wykaż, że maksymalna objętość takiego otworu wynosi 8/27 objętości kuli.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

5 Jeden z elementów mechanicznego regulatora silnika składa się z metalowej kuli o promieniu r, w której wycięto otwór w kształcie walca. Aby zoptymalizować wydajność działania, otwór musi mieć maksymalną możliwą powierzchnię. Znajdź wysokość h walca, gdy jego powierzchnia jest maksymalna.

Odpowiedź Rozwiązanie

6 Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego dane jest jako

$$u(\lambda) = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

gdzie $u(\lambda)$ to gęstość energii pomiędzy λ a $\lambda + \mathrm{d}\lambda$, przy czym λ to długość fali promieniowania, h, c i T to odpowiednio stała Plancka, prędkość światła i temperatura bezwzględna, a k to stała Boltzmanna.
Wykaż, że dla danej temperatury długość fali o maksymalnej gęstości $\lambda_{\max}$ dana jest wzorem

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4{,}965k}.$$

Wskazówka: Użyj metody Newtona-Raphsona do rozwiązania równania $\dfrac{x}{1 - e^{-x}} - 5 = 0$.

Rozwiązanie

7 W kablu podmorskim zakres sygnału $r(x)$ dany jest wzorem

$$r(x) = Ax^2 \ln(1/x),$$

gdzie A jest dodatnią stałą, a x jest stosunkiem promienia rdzenia do promienia kabla.

(a) Znajdź punkt stacjonarny $r(x)$.

(b) Wykaż, że w tym punkcie stacjonarnym $r(x)$ ma swoje maksimum.

Odpowiedź Rozwiązanie

8 Kabel elektryczny ma jeden koniec przymocowany do podłogi, a drugi do ściany. Pomiędzy tymi dwoma punktami kabel wisi, przybierając kształt wyrażony wzorem

$$y = 5e^{wx/f},$$

gdzie y to wysokość punktu na kablu odległego o x w poziomie od dolnego punktu mocowania kabla, a w i f są stałymi.

(a) Znajdź zmianę w obliczonej wartości y spowodowaną małymi błędami w pomiarze w i f.

(b) Następnie wykaż, że błąd procentowy wartości y jest równy:

$(wx/f) \cdot$ (różnica błędów procentowych w wartościach w i f).

Odpowiedź **Rozwiązanie**

---

9 Ugięcie y w środku okrągłej płyty zawieszonej na swoim obwodzie i równomiernie obciążonej dane jest wzorem

$$y = \frac{kwd^4}{t^3},$$

gdzie: w - całkowite obciążenie, d - średnica płyty, t – grubość płyty, a k jest stałą.

Jeżeli w pomiarze wartości w, d i t mogą wystąpić błędy odpowiednio $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ i $\pm 1\%$, skorzystaj z przybliżenia pierwszego rzędu do wyznaczenia maksymalnego możliwego błędu w obliczonej wartości y.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

---

10 W galwanometrze stycznym prąd jest proporcjonalny do tangensa wychylenia igły. Wykaż, że jeśli obserwator zawsze popełnia ten sam błąd podczas odczytu odchylenia igły, błąd procentowy w pomiarach prądu jest najmniejszy, gdy odczyt igły wynosi 45°.

Rozwiązanie

---

11 Dla jednego z procesów produkcyjnych, obejmującego konstrukcję stożka o podstawie kołowej, należy wyznaczyć, jak pole powierzchni S zmienia się w zależności od zmiany kąta półpionowego α, biorąc pod uwagę, że pole powierzchni bocznej stożka kołowego o kącie półpionowym α dane jest wzorem

$$S = \pi h^2 \operatorname{tg}\alpha \sec\alpha,$$

gdzie h to wysokość stożka. Wykaż, że niewielki wzrost kąta półpionowego $\delta\alpha$ powoduje zwiększenie pola powierzchni stożka o wielkość

$$\delta S = \frac{(1+\sin^2\alpha)\delta\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

i że jest ono najmniejsze dla danej wartości $\delta\alpha$, kiedy $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Odpowiedzi

1 2,80 m szerokości i 2,80 m wysokości prostokąta

Pytanie Rozwiązanie

3 $\dfrac{(a+b)^2}{2}$

Pytanie Rozwiązanie

4 Objętość stożkowego otworu wynosi $\dfrac{1}{3}\pi r^3(32/27)$, gdzie r jest promieniem kuli.

Pytanie Rozwiązanie

5 $h = \sqrt{2}r$

Pytanie Rozwiązanie

7 (a) $x = 1/\sqrt{e}$

Pytanie Rozwiązanie

8 (a) $\dfrac{wxy}{f}\left(\dfrac{\delta w}{w} - \dfrac{\delta f}{f}\right)$

Pytanie Rozwiązanie

9 $\pm 12\%$

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Maksymalna ilość światła będzie wpuszczana, gdy okno ma maksymalną powierzchnię. Utrzymując stały obwód okna, każda zmiana wysokości okna będzie skutkować odpowiednią zmianą jego szerokości. Niech D będzie średnicą półokręgu, a h wysokością prostokąta. Wtedy obwód okna to

$$D + 2h + \frac{\pi D}{2} = 10.$$

Z powyższego równania otrzymujemy:

$$h = 5 - \frac{D}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Powierzchnia okna to łączna powierzchnia prostokąta i półokręgu:

$$A = Dh + \frac{\pi}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 5D - \frac{D^2}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi D^2}{8} = 5D - \frac{D^2}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Różniczkując względem D, otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}D} = 5 - D\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad \frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}D^2} = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Zatem okno ma maksymalną powierzchnię, gdy $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}D} = 0$, czyli gdy:

$5 - D\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, co daje $D = 5 \Big/ \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 2{,}80$ metra z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Wówczas wysokość prostokątnej części okna wynosi:

$h = 5 - \frac{2{,}80}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}40$ metra z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku,

dając całkowitą wysokość okna 2,80 metra z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Pytanie **Odpowiedź**

2 Niech H będzie wysokością walca poniżej stożka, który znajduje się na jego czubku. Niech h będzie wysokością stożka, a r będzie promieniem walca i podstawy stożka. Objętość walca wynosi wtedy $\pi r^2 H$, a objętość stożka $\pi r^2 h/3$. Niech V oznacza objętość destylatora. Zatem:

$$V = \pi r^2\left(H + \frac{h}{3}\right), \quad \text{tak więc} \quad H = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{h}{3}.$$

Pole powierzchni destylatora jest sumą pola (jednej) podstawy walca oraz pól powierzchni bocznej walca i stożka. Czyli:

$$S_{\text{wal}} = \pi r^2 + 2\pi r H$$

jest sumą pól podstawy walca oraz powierzchni bocznej walca.

Powierzchnią nasadki stożkowej jest:

$$S_{\text{sto}} = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

Aby znaleźć minimalną powierzchnię dla stałej objętości i stałego promienia, musimy zminimalizować wyrażenie

$$S = \pi r^2 + 2\pi rH + \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{h}{3}\right) + \pi r\sqrt{r^2+h^2},$$

co robimy, traktując wysokość h stożka jako zmienną (towarzyszy temu odpowiednia zmiana wysokości walca). Teraz:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} = -\frac{2\pi r}{3} + \frac{\pi rh}{\sqrt{r^2+h^2}} = 0, \text{ gdy } \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{2}{3},$$

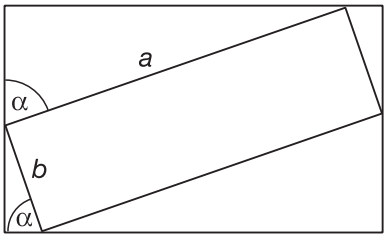
to znaczy h jest punktem stacjonarnym, jeśli półpionowy kąt stożka α jest taki, że $\cos\alpha = 2/3$.

Fakt, że dla takiego h powierzchnia destylatora jest najmniejsza, stwierdzamy na podstawie znaku drugiej pochodnej:

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}h^2} = \left(\frac{\pi rh}{\sqrt{(r^2+h^2)}}\right)'_h = \frac{\pi r\left(r^2+h^2\right)^{1/2} - \pi rh^2\left(r^2+h^2\right)^{-1/2}}{(r^2+h^2)} = \frac{\pi r^3}{(r^2+h^2)^{3/2}} > 0.$$

Pytanie

3



Każdy z boków prostokąta zewnętrznego jest nachylony pod tym samym kątem do sąsiedniego boku prostokąta wewnętrznego. Jeśli ten kąt oznaczymy jako α, to długości boków prostokąta zewnętrznego wynoszą:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha \quad \text{oraz} \quad a\cos\alpha + b\sin\alpha.$$

Konsekwentnie pole powierzchni prostokąta zewnętrznego dane jest jako:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= (a\sin\alpha + b\cos\alpha)(a\cos\alpha + b\sin\alpha) \\ &= ab\sin^2\alpha + ab\cos^2\alpha + \left(a^2+b^2\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ &= ab + \left(a^2+b^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= \left(a^2+b^2\right)\cos 2\alpha \\ &= 0, \text{ kiedy } 2\alpha = \pi/2, \text{ czyli } \alpha = \pi/4. \end{aligned}$$

Tak więc $\alpha = \pi/4$ jest punktem stacjonarnym. Ponieważ

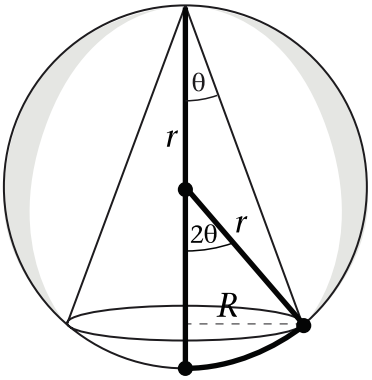
$$A''(\alpha) = -\left(a^2 + b^2\right) 2 \sin 2\alpha < 0 \text{ dla } \alpha = \pi/4,$$

to w tym punkcie stacjonarnym funkcja ma swoje maksimum. Powierzchnia prostokąta zewnętrznego wynosi zatem:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= ab + \left(a^2 + b^2\right) \frac{\sin \pi/2}{2} \\ &= ab + \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \\ &= \frac{(a+b)^2}{2} \end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**

4



Niech r będzie promieniem kuli.

Jeśli półpionowy kąt stożka to θ, wówczas wysokość stożka to $h = r + r\cos 2\theta$, a objętość stożka dana jest jako

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \quad \text{gdzie } R = r \sin 2\theta \text{ to promień podstawy stożka.}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 \sin^2 2\theta r(1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2 2\theta + \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2 2\theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

Objętość $V(\theta)$ ma punkt stacjonarny, gdy $V'(\theta) = 0$. Jeśli $V''(\theta) < 0$ w tym punkcie, to objętość otworu jest maksymalna.

$$V'(\theta) = \frac{1}{3}\pi r^3(2\sin 2\theta \cdot 2\cos 2\theta) + \frac{1}{3}\pi r^3(2\sin 2\theta \cdot 2\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta \cdot 2\sin 2\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 2\sin 2\theta(2\cos 2\theta) + \frac{1}{3}\pi r^3 2\sin 2\theta(2\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 2\sin 2\theta\left[(2\cos 2\theta) + \left(2\cos^2 2\theta - [1 - \cos^2 2\theta]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 2\sin 2\theta\left(3\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 1\right) = 0, \text{ kiedy}$$

$\sin 2\theta = 0$ lub $3\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 1 = 0$. Czyli kiedy $\theta = 0$ lub kiedy

$(3\cos 2\theta - 1)(\cos 2\theta + 1) = 0$, tj. $\cos 2\theta = -1$, zatem $\theta = \pi/2$ lub

$3\cos 2\theta = 1$, skąd $\cos 2\theta = 1/3$ oraz $\sin 2\theta = 2\sqrt{2}/3$.

Punkty stacjonarne istnieją dla $\theta = 0$, co daje stożek o zerowej objętości, dla $\theta = \pi/2$, co ponownie daje stożek o zerowej objętości oraz dla $2\theta = \cos^{-1}(1/3)$, kiedy to stożek ma maksymalną objętość.

Teraz, jeśli $\cos 2\theta = 1/3$, to

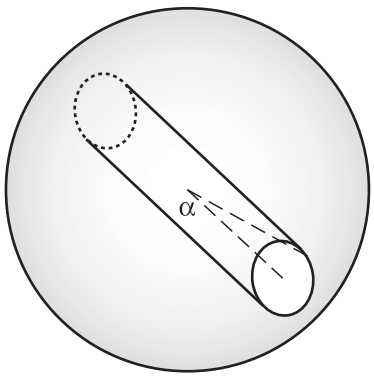
$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2 2\theta(1 + \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3(8/9)(1 + 1/3) = \frac{1}{3}\pi r^3(32/27).$$

Objętość kuli wynosi $\frac{4}{3}\pi r^3$, a więc maksymalna objętość stożka wynosi 8/27 objętości kuli.

Pytanie **Odpowiedź**

5



Niech α będzie kątem pomiędzy promieniem kuli, którego koniec znajduje się na krawędzi otworu w kształcie walca, a promieniem wzdłuż osi walca. Wtedy:

$\frac{h/2}{r} = \cos\alpha$, zatem $h = 2r\cos\alpha$.

Ponadto pole powierzchni walca $S(\alpha)$ dane jest jako:

obwód podstawy walca $\cdot$ wysokość walca
$= 2\pi r \sin\alpha \cdot 2r\cos\alpha$
$= 2\pi r^2 \sin 2\alpha.$

Zatem:

$S'(\alpha) = 4\pi r^2 \cos 2\alpha$ oraz
$S''(\alpha) = -8\pi r^2 \sin 2\alpha.$

Tak więc $S'(\alpha) = 0$, gdy $\cos 2\alpha = 0$, czyli $2\alpha = \pi/2$, zatem $\alpha = \pi/4$.

$S''(\pi/4) < 0$, co mówi nam, że gdy $\alpha = \pi/4$, to pole powierzchni walca jest maksymalne. Ponadto, gdy $\alpha = \pi/4$, wtedy

$$h = 2r\cos\pi/4 = \frac{2}{\sqrt{2}}r = \sqrt{2}r.$$

Pytanie Odpowiedź

6

$u(\lambda) = \dfrac{8\pi c}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$, zatem:

$$\begin{aligned}
u'(\lambda) &= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} - \frac{8\pi c}{\lambda^5}\frac{(-hc/\lambda^2 kT)e^{hc/\lambda kT}}{(e^{hc/\lambda kT}-1)^2} \\
&= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} + \frac{8\pi c}{\lambda^5}\frac{(hc/\lambda^2 kT)e^{hc/\lambda kT}}{(e^{hc/\lambda kT}-1)^2} \\
&= -5\frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1} + \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{(x)e^{x}}{(e^{x}-1)^2}, \text{ gdzie } x = hc/\lambda kT \\
&= \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1} - 5\right) \\
&= \frac{8\pi c}{\lambda^6}\frac{1}{e^{x}-1}\left(\frac{x}{1-e^{-x}} - 5\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

kiedy

$$\frac{x}{1-e^{-x}} - 5 = 0.$$

Wykres $f(x) = \dfrac{x}{1-e^{-x}} - 5$ pokaże, że $x = 5$ jest dobrym przybliżeniem rozwiązania równania $f(x) = 0$ [zauważ, że $x = 0$ nie należy do dziedziny funkcji].

Teraz zastosujemy metodę Newtona-Raphsona:

$f(x) = \dfrac{x}{1-e^{-x}} - 5$, tak więc $f'(x) = \dfrac{1(1-e^{-x}) - xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$, gdzie

$x_{n+1} = x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ oraz $x_0 = 5.$

Można to wprowadzić do arkusza kalkulacyjnego i uzyskać następujący wynik:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	5,00	0,033918	0,972635
1	4,965127	1,28E-05	0,971896
2	4,965114	1,88E-12	0,971895
3	4,965114	0	0,971895

Zatem, kiedy $\lambda = \lambda_{\max}$, wtedy $x = hc/\lambda_{\max}kT = 4{,}965$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Stąd

$$\lambda_{\max}T = \frac{hc}{4{,}965k}$$

Pytanie

---

7 (a) Mamy dane $r(x) = Ax^2 \ln(1/x)$. Ze względu na logarytm zakładamy, że $x > 0$. Punkt stacjonarny istnieje, gdy $r'(x) = 0$.

Teraz

$r(x) = Ax^2 \ln(1/x) = -Ax^2 \ln x$, tak więc

$r'(x) = -2Ax \ln x - Ax$.

Aby znaleźć punkt stacjonarny, przyrównujemy $r'(x)$ do zera:

$$r'(x) = -2Ax \ln x - Ax = -Ax(2 \ln x + 1) = 0$$

Zatem punkt stacjonarny istnieje, kiedy

$2 \ln x = -1$, czyli kiedy $x = 1/\sqrt{e}$.

(Przypadek $x = 0$ pomijamy, gdyż założyliśmy, że $x > 0$.)

(b) Aby określić charakter punktu stacjonarnego, musimy rozważyć drugą pochodną.

$$r''(x) = -[Ax(2 \ln x + 1)]' = -[A(2 \ln x + 1) + Ax(2[1/x])],$$

$$\begin{aligned}
\text{zatem } r''\left(1/\sqrt{e}\right) &= -\left[A\left(2\ln\left(1/\sqrt{e}\right) + 1\right) + A\left(1/\sqrt{e}\right)\left(2\left[1/\left(1/\sqrt{e}\right)\right]\right)\right] \\
&= -\left[A(-\ln(e) + 1) + A\left(1/\sqrt{e}\right)\left(2\sqrt{e}\right)\right] \\
&= -A\left(1/\sqrt{e}\right)\left(2\sqrt{e} + 1\right), \text{ ponieważ } \ln e = 1 \\
&< 0
\end{aligned}$$

Ponieważ $r''\left(1/\sqrt{e}\right) < 0$, w tym punkcie stacjonarnym $r(x)$ ma swoje maksimum.

Pytanie **Odpowiedź**

---

8 (a) Jeśli $y = 5e^{wx/f}$, wówczas:

$$\begin{aligned}\delta y &\cong \frac{\partial y}{\partial w}\delta w + \frac{\partial y}{\partial f}\delta f \\ &\cong 5\frac{x}{f}e^{wx/f}\delta w + 5wxe^{wx/f}\left(-1/f^2\right)\delta f \\ &\cong \frac{x}{f}y\delta w - \frac{wx}{f^2}y\delta f \\ &\cong \frac{wex}{f}y\frac{\delta w}{w} - \frac{wx}{f}y\frac{\delta f}{f} \\ &\cong \frac{wxy}{f}\left(\frac{\delta w}{w} - \frac{\delta f}{f}\right)\end{aligned}$$

(b) Zatem:

$$\frac{\delta y}{y} \cdot 100 \cong \frac{wx}{f}\left(\frac{\delta w}{w} - \frac{\delta f}{f}\right) \cdot 100\,,$$ co jest zgodne z tezą punktu (b).

Pytanie **Odpowiedź**

9 Jeśli $y = \dfrac{kwd^4}{t^3}$, wówczas przybliżony błąd δy wynikający z błędów pomiarowych δw, δd i δt odpowiednio dla w, d i t dany jest jako:

$$\begin{aligned}\delta y &\cong \frac{\partial y}{\partial w}\delta w + \frac{\partial y}{\partial d}\delta d + \frac{\partial y}{\partial t}\delta t \\ &= \frac{kd^4}{t^3}\delta w + 4\frac{kwd^3}{t^3}\delta d - 3\frac{kwd^4}{t^4}\delta t \\ &= \frac{y}{w}\delta w + 4\frac{y}{d}\delta d - 3\frac{y}{t}\delta t\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{\delta y}{y} \cdot 100 &\cong \frac{\delta w}{w} \cdot 100 + 4\frac{\delta d}{d} \cdot 100 - 3\frac{\delta t}{t} \cdot 100 \\ &= \pm 1 + 4 \cdot (\pm 2) - 3 \cdot (\pm 1) \\ &= \pm 1 \pm 8 \pm 3 = \pm 12\%\end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**

10 Prąd $I(\theta)$ jest proporcjonalny do tangensa wychylenia θ igły, zatem

$$I(\theta) = k \operatorname{tg} \theta.$$

Błąd $\delta I(\theta)$ w pomiarach $I(\theta)$ z powodu stałego błędu $\delta\theta$ w odczycie wychylenia θ to:

$$\begin{aligned}\delta I(\theta) &\cong \frac{\mathrm{d}I(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\delta\theta \\ &= k \sec^2\theta\,\delta\theta\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{\delta I(\theta)}{I(\theta)} &\cong \frac{k\sec^2\theta}{k\operatorname{tg}\theta}\delta\theta \\ &= \frac{2}{\sin 2\theta}\delta\theta\end{aligned}$$

Punkt stacjonarny istnieje, kiedy $\left(\dfrac{2}{\sin 2\theta}\right)' = 0$, czyli kiedy

$$\left(\frac{2}{\sin 2\theta}\right)' = \frac{-4\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} = 0.$$

Jest tak, gdy $\cos 2\theta = 0$, czyli gdy $2\theta = \pi/2$, skąd $\theta = \pi/4$.

Druga pochodna

$$\left(\frac{2}{\sin 2\theta}\right)'' = \left(\frac{-4\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right)' = \frac{8\sin 2\theta \cdot \sin^2 2\theta + 4\cos 2\theta \cdot 4\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin^4 2\theta}$$

jest dodatnia dla $\theta = \pi/4$.

Dlatego błąd procentowy w pomiarach prądu jest najmniejszy, jeśli $\theta = \pi/4$.

Pytanie

11 Ponieważ $S = \pi h^2 \operatorname{tg}\alpha \sec\alpha$, zatem:

$$\begin{aligned}S'(\alpha) &= \pi h^2\left(\sec^2\alpha\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha[\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha]\right) \\ &= \pi h^2(\sec^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\sec\alpha) \\ &= \pi h^2\sec\alpha(\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha) \\ &= \frac{S(\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}(\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)\end{aligned}$$

Zmiana $\delta S(\alpha)$ wielkości $S(\alpha)$ spowodowana zmianą α o $\delta\alpha$ dana jest jako:

$$\begin{aligned}\delta S(\alpha) &= S'(\alpha)\delta\alpha \\ &= \frac{S(\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\end{aligned}$$

Konsekwentnie względna zmiana wielkości $S(\alpha)$ to:

$$\frac{\delta S(\alpha)}{S(\alpha)} = \left(\frac{\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\delta\alpha = \left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\delta\alpha$$

Aby znaleźć minimalne zwiększenie pola powierzchni stożka, musimy zróżniczkować $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ względem α.

$$\left[\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right]' = \left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\ \sin\alpha\cos\alpha - \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right]\left[1+\sin^2\alpha\right]}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right] - \left[\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha\right]}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\right)$$

Ponieważ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

$$= \left(\frac{2\sin^2\alpha - 2\sin^4\alpha - \left[1 - 2\sin^2\alpha\right] - \left[\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha\right]}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{3\sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}\right) = 0, \text{ kiedy } 3\sin^2\alpha = 1, \text{ czyli kiedy } \sin\alpha = 1/\sqrt{3}.$$

Pytanie